Aufgabenblatt 1 mit Lösungen

Definitionsbereiche Nullstellen

Quer durch alle Funktionsarten

Klassenstufe 10

Datei Nr. 18303

Stand 25.4.2017

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Funktionen – gemischte Trainingsaufgaben 1

(1) Berechne ohne Taschenrechner die **Nullstellen** der folgenden Funktionen.
Vereinfache die Nullstellen falls möglich.

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 4$ b) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 10x$

c) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$ d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

(2) Berechne ohne Taschenrechner den **Definitionsbereich, Nullstellen und Polstellen** der folgenden Funktionen. Was ergibt sich daraus für den Graphen der Funktion?

a) $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$ d) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + [illegible]}{[illegible]}$

(3) Bestimme die **waagrechte oder schräge Asymptote** der Graphen der Funktionen aus (2).

(4) Bestimme den **Definitionsbereich, Nullstellen , Polstellen und hebbare Definitionslücken**.

Wie verhält sich f an der Definitionslücke? Welche Asymptote hat das Schaubild K?

a) $f(x) = \frac{3x^3 - 48x}{-2x^3 + 12x^2 - 18x}$ b) $f(x) = \frac{[illegible]x^3 + 3x^2 + 2x}{[illegible]x^2 - 6x}$

c) $f(x) = \frac{(x^2 + x)(x - 4)}{(x^2 - 1)}$ d) $f(x) = [illegible]\frac{4x^3 - 16x}{x^2 - x - 2}$

(5) Berechne ohne Taschenrechner den **Definitionsbereich und die Nullstellen**.

a) $f(x) = \sqrt{3 - x}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$

(6) Berechne ohne Taschenrechner den **Definitionsbereich und die Nullstellen**.

a) $f(x) = \log_2([illegible]3)$ b) $f(x) = -\log_3([illegible] - x)$ c) $f(x) = \log_2\left(2x^2 + 9x - 5\right)$

(7) Berechne ohne Taschenrechner die **Nullstellen** der folgenden Funktionen.
Vereinfache die Nullstellen falls möglich.

a) $f(x) = e^x - [illegible]$ b) $f(x) = 4 - e^{1-x}$ c) $f(x) = x \cdot \left(e^{2x} - 1\right)$

(8) Berechne ohne Taschenrechner die **Nullstellen** der folgenden Funktionen.

a) Gegeben ist $f(x) = 2 \cdot \sin(x) - 1$ für $0 \le x \le 2\pi$.
Gesucht: Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen.
Wie entsteht der Graph aus y = sin(x)? Folgere daraus die Wertmenge?

b) Gegeben ist $f(x) = [illegible]3\sin(\pi x) + 3$ **für** $x \in \mathbb{R}$**.** Durch welche Abbildungen entsteht das Schaubild aus $y = \sin(x)$? Bestimme damit die Periodenlänge sowie für $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ die Schnittpunkte mit der x-Achse. Bestimme damit die Wertmenge.

c) Gegeben ist $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ Bestimme für $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ die Schnittpunkte mit der x-Achse.
Durch welche Abbildungen entsteht der Graph aus der Kurve $y = \cos(x)$?
Bestimme damit die Wertmenge von f. Zeichne das Schaubild mit Hilfe dieser Abbildungen.

d) Gegeben ist $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$
Durch welche Abbildungen entsteht das Schaubild aus $y = \sin(x)$?
Bestimme die Periode von f sowie für $\mathbf{D} = \mathbb{R}$ die Schnittpunkte mit der x-Achse.
Bestimme damit die Wertmenge von f.

Lösung Aufgabe 1

Berechne ohne Taschenrechner die **Nullstellen** der folgenden Funktionen.
Vereinfache die Nullstellen falls möglich.

a) $f(x)=3x^2+4x-4$ Bedingung: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+4x-4=0$

Lösung mit der **Mitternachtsformel**: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot3\cdot(-4)}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{-4\pm8}{6}=\begin{cases}\frac{2}{3}\\-2\end{cases}$$

Lösung mit der **pq-Formel**: $3x^2+4x-4=0 \quad |:3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=0$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{12}{9}}=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}}=-\frac{2}{3}\pm\frac{4}{3}=\begin{cases}\frac{2}{3}\\-2\end{cases}$$

Kommentar: Ein Beispiel dafür, warum oft die Mitternachtsformel günstiger ist.

b) $f(x)=x^3-4x^2-10x$ Bedingung: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2-10x=0$

Weil das Absolutglied 0 ist (bzw. weil alle Summanden x enthalten), sollte man x ausklammern:

$x\cdot\left(x^2-4x-10\right)=0$. Jetzt liegt ein **Nullprodukt** vor.

Es wird Null, wenn einer der Faktoren Null wird:

1\. Faktor: $x_1=0$

2\. Faktor: $x^2-4x-10=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+40}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{56}}{2}$

Da 56 die Quadratzahl 4 als Teiler hat, kann man sie zerlegen und dann teilweise die Wurzel ziehen: $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4\cdot14}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{14}}{2}=\frac{4}{2}\pm\frac{2\sqrt{14}}{2}=2\pm\sqrt{14}$

c) $f(x)=x^4+5x^2-36$ Bedingung: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4+5x^2-36=0$

1. Lösungsweg:

Weil x^2 und x^4 vorkommen, ist dies eine quadratische Gleichung für x^2, man nennt sie daher **biquadratische Gleichung**. Wendet man daher eine Lösungsformel für eine quadratische Gleichung an, erhält man x^2 statt x:

$$x^2=\frac{-5\pm\sqrt{25+4\cdot36}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{-5\pm13}{2}=\begin{cases}4\\-9\end{cases}$$

Aus $x^2=4$ folgt $x_{1,2}=\pm2$. Aus $x^2=-9$ folgt keine weitere Lösung.

2. Lösungsweg:

Man kann die biquadratische Gleichung durch die Substitution $u=x^2$ in diese quadratische Gleichung verwandeln: $u^2+5u-36=0$ mit $u=\frac{-5\pm\sqrt{25+4\cdot36}}{2}=\frac{-5\pm13}{2}=\begin{cases}4\\-9\end{cases}$

Aus $u=x^2=4$ folgt $x_{1,2}=\pm2$. Aus $u=x^2=-9$ folgt keine weitere Lösung.

d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ Bedingung: $f(x) = 0 \iff 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

Für die Lösung dieser Gleichung benötigt man eine Probierlösung.

Diese kann x = 1 sein: $f(1) = 2 + 3 - 3 - 2 = 0$

Jetzt muss man wissen, dass man damit den Faktor $(x-1)$ aus dem Funktionsterm ausklammern kann. Dies geschieht entweder

mittels Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(2x^3+3x^2-3x-2\right):(x-1)=2x^2+5x+2 \\
-\left(2x^3-2x^2\right) \\
\hline
\qquad 5x^2-3x \\
\quad -(5x^2-5x) \\
\hline
\qquad\qquad 2x-2 \\
\qquad\quad -(2x-2) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

oder mit dem Horner Schema:

	2	3	−3	−2
1	0	2	5	2
	2	5	2	$\boxed{0}$

Beide Verfahren liefern: $\left(2x^3+3x^2-3x-2\right):(x-1) = 2x^2+5x+2$

bzw. $\left(2x^3+3x^2-3x-2\right) = (x-1)\left(2x^2+5x+2\right)$

Damit lautet die Nullstellengleichung:

$(x-1)\left(2x^2+5x+2\right) = 0$ Jetzt liegt ein **Nullprodukt** vor.

Es wird Null, wenn einer der Faktoren Null wird:

1. Faktor: $x - 1 = 0 \iff x_1 = 0$ Diese Lösung war bekannt.

2. Faktor: $2x^2 + 5x + 2 = 0$ $x_{2,3} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \dfrac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$

f hat also die Nullstellen: 1, −2 und $-\frac{1}{2}$